Cálculo I

Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo I
Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Luis Gámez Ruíz.

Descripción Examen parcial de evaluación continua.

Fecha 6 de noviembre de 2023.

Ejercicio 1.

1. (2 puntos) Escribe los siguientes enunciados (sin demostraciones):
   - Axioma del supremo.
   - Principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$.
   - Propiedad arquimediana del orden en $\mathbb{N}$.
   - Definición de conjunto denso.
2. (2 puntos) Enuncia y demuestra el Teorema de caracterización del supremo (incluyendo la caracterización por sucesiones).

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Demuestra que la suma de los cubos de tres naturales consecutivos es siempre múltiplo de 9.

Esto es equivalente a probar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists k_n \in \mathbb{N} : n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k_n$$

Lo haremos por inducción:

∗ Caso $n = 1$

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 9 \cdot 4 \quad \text{Sí} \quad (k_1 = 4)$$

∗ Supuesto cierto para n (hipótesis de inducción) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k_n \quad (k_n \in \mathbb{N})$
¿Será ciero para $n+1$? Veamos...

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 = \\ &= n^3 + (n+1)^3 + (n+3)^3 + 9(n^2+3n+3) \overset{(1)}{=} 9k_n + 9(n^2+3n+3) = \\ &= 9\underbrace{(k_n + n^2 + 3n + 3)}_{k_{n+1}} \Longrightarrow \ \text{Sí}\end{aligned}$$

Luego queda demostrado por inducción.

Ejercicio 3 (3.5 puntos)**.** Considera $r \in \mathbb{R}$ (fijo) y sea $x_n = r^n, \forall n \in \mathbb{N}$ (observa que $x_1 = r$ y $x_{n+1} = rx_n, \forall n \in \mathbb{N}$). Justifica la posible monotonía, la posible acotación y la posible convergencia (calculando, en su caso, el límite) de la sucesión $\{x_n\}$, distinguiendo los casos siguientes:

1. Casos $r = 0$, $r = 1$, $r = -1$.
2. Caso $r \in \ ]0, 1[$.
3. Caso $r > 1$.
4. Caso $r \in \ ]-1, 0[$.
5. Caso $r < -1$.

Consideremos también $y_n = \sum_{k=0}^{n} r^k, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Si $r \neq 1$, demuestra que: $y_n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Teniendo en cuenta todos los apartados anteriores, ¿para qué valores de r será convergente la sucesión $\{y_n\}$?