

Cálculo I

Examen IV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Cálculo I

Examen IV

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Luis Gámez Ruíz.

Descripción Examen parcial de evaluación continua.

Fecha 6 de noviembre de 2023.

Ejercicio 1.

- (2 puntos) Escribe los siguientes enunciados (sin demostraciones):
 - Axioma del supremo.
 - Principio de buena ordenación de \mathbb{N} .
 - Propiedad arquimediana del orden en \mathbb{N} .
 - Definición de conjunto denso.
- (2 puntos) Enuncia y demuestra el Teorema de caracterización del supremo (incluyendo la caracterización por sucesiones).

Ejercicio 2 (2.5 puntos). Demuestra que la suma de los cubos de tres naturales consecutivos es siempre múltiplo de 9.

Esto es equivalente a probar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k_n \in \mathbb{N} : n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k_n$$

Lo haremos por inducción:

* Caso $n = 1$

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 9 \cdot 4 \quad \text{Sí } (k_1 = 4)$$

* Supuesto cierto para n (hipótesis de inducción) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k_n$ ($k_n \in \mathbb{N}$)

¿Será cierto para $n+1$? Veamos...

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 = \\ &= n^3 + (n+1)^3 + (n+3)^3 + 9(n^2 + 3n + 3) \stackrel{(1)}{=} 9k_n + 9(n^2 + 3n + 3) = \\ &= 9 \underbrace{(k_n + n^2 + 3n + 3)}_{k_{n+1}} \implies \text{Sí} \end{aligned}$$

Luego queda demostrado por inducción.

Ejercicio 3 (3.5 puntos). Considera $r \in \mathbb{R}$ (fijo) y sea $x_n = r^n, \forall n \in \mathbb{N}$ (observa que $x_1 = r$ y $x_{n+1} = rx_n, \forall n \in \mathbb{N}$). Justifica la posible monotonía, la posible acotación y la posible convergencia (calculando, en su caso, el límite) de la sucesión $\{x_n\}$, distinguiendo los casos siguientes:

- Casos $r = 0, r = 1, r = -1$.
- Caso $r \in]0, 1[$.
- Caso $r > 1$.
- Caso $r \in]-1, 0[$.
- Caso $r < -1$.

Consideremos también $y_n = \sum_{k=0}^n r^k, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Si $r \neq 1$, demuestra que: $y_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Teniendo en cuenta todos los apartados anteriores, ¿para qué valores de r será convergente la sucesión $\{y_n\}$?